

## Analisa Presisi Sumbu Filosofis Yogyakarta Menggunakan Trigonometri Segitiga Bola

Najib Mubarak

Institut Islam Nahdlatul Ulama (INISNU) Temanggung

[najib.mubarak28@gmail.com](mailto:najib.mubarak28@gmail.com)

\*Correspondent Author; Email Author

### ARTICLE INFO

#### Article history

Received:27-12-2025

Revised:19-01-2026

Accepted:02-02-2026

#### Keywords

Sumbu Filosofis Yogyakarta  
Trigonometri  
Segitiga Bola

### ABSTRACT

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan secara matematis presisi linearitas, presisi bangunan, dan presisi jarak dalam sumbu filosofis Yogyakarta menggunakan trigonometri segitiga bola. Berdasarkan jenis datanya, penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif.. Adapun berdasarkan framework penelitiannya, penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dengan mendeskripsikan sumbu filosofis Yogyakarta secara matematis menggunakan trigonometri segitiga bola. Sumbu filosofis Yogyakarta memiliki tingkat linearitas sangat lurus dengan tingkat kesalahan hanya berkisar 1 derajat. Hal ini didukung dengan arah bangunan Panggung Krpyak dan Keraton Yogyakarta yang juga menghadap sejajar dengan arah sumbu. Selain itu, jarak antara penggal pertama dan penggal kedua dari sumbu filosofis memiliki panjang yang sama berkisar 2,5 kilometer dan panjang keseluruhan sumbu sepanjang tepat mendekati 5 kilometer.

This is an open-access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



### Pendahuluan

Kota Yogyakarta memiliki kekayaan nilai filosofis, religius, dan budaya. Kekayaan nilai dari kota Yogyakarta mencerminkan kekayaan latarbelakang sejarah serta kuatnya pengaruh budaya yang sangat beragam (Putra, 2003). Salah satu kekayaan nilai budaya kota Yogyakarta dengan nilai spiritual dan filosofis adalah pada tata ruang kotanya (Pardimin, 2018).

Keunikan tata ruang kota (urban planning) dari kota Yogyakarta merupakan aset

budaya dengan kombinasi nilai spiritual dan filosofis. Artinya, desain kota ini memiliki dasar pemikiran yang terencana sekaligus berkaitan dengan nilai religiusitas yang tinggi (Sunaryati, 2015). Nilai filosofis dan spiritual dalam tata ruang kota Yogyakarta terlihat dalam arsitektur kota, desain jalan, serta konsep penataan ruang public di dalamnya (Hatley, 2008).

Salah satu aset budaya kota Yogyakarta dalam tata ruang kotanya adalah sumbu filosofis Yogyakarta. Sumbu ini merupakan garis simbolis dan fisik yang membentang dari Panggung Krapyak menuju Tugu Jogja dengan melewati tepat Kraton Yogyakarta (Mardika, 2023). Sumbu filosofis Yogyakarta merupakan manifestasi nilai-nilai spiritual, filosofis, politik, bahkan ekonomi (Sunaryati, 2015). Sumbu filosofis Yogyakarta dibangun dengan mempertimbangkan budaya hindu, buda, dan islam (Putra, 2003).

Namun, aset budaya dengan kekayaan nilai budaya, filosofis dan spiritual dalam sumbu filosofis Yogyakarta tidak dibarengi dengan kajian rasional sains yang mendalam. Sumbu filosofis Yogyakarta merupakan sumbu nilai sekaligus fisik (Mardika, 2023). Kajian rasional sains yang mendalam melalui teori-teori matematika dalam mengungkap presisi tata ruang kota Yogyakarta menjadi penting untuk dilakukan. Pengungkapan matematis sumbu filosofis dalam bentuk fisik akan berimplikasi pada interpretasi baru nilai-nilai lain dari sumbu filosofis Yogyakarta.

Sebagai aset budaya yang diakui sebagai warisan budaya dunia pada September 2023 (Detik.com, 2023), kajian rasional sains melalui teori matematika menjadi penting untuk dilakukan. Beberapa teori matematika yang dapat dipakai dalam menggali lebih dalam sumbu filosofis Yogyakarta misalnya trigonometri dan geometri non-euclid secara umum. Hal ini sangat relevan dilakukan mengingat sumbu filosofis Yogyakarta merupakan aset budaya berkaitan dengan garis, sudut, segitiga dan lokasi azimuth.

Kajian trigonometri dan geometri non-euclid sumbu imajinetr Yogyakarta tidak semata hanya tentang linearitas posisi Panggung Krapyak, Kraton Yogyakarta, dan Tugu Jogja. Lebih dari itu, kajian trigonometri dalam mengungkapkan lebih mendalam hubungan budaya dan matematika (ethnomathematics) sumbu filosofis Yogyakarta dapat mengungkapkan presisi, akurasi, serta keterkaitan dari elemen-elemen tata ruang kota Yogyakarta (Soedarto, 2007).

Dengan trigonometri non-euclid segitiga bola (spherical triangle) misalnya, tata ruang kota Yogyakarta dalam sumbu filosofis Yogyakarta dapat diungkapkan presisi sudut, presisi linearitas, hubungan segitiga, bahkan azimuth tata ruang kota Yogyakarta (Rivai, 2018). Bahkan, jika dilakukan pengukuran dari sumber primer lapangan langsung, maka akan didapatkan kesimpulan rasional matematis berdasar konteks lapangan sumbu simetri Yogyakarta.

Sumbu filosofis Yogyakarta dipengaruhi agama sebagai orientasi kosmologi. Sumbu filosofis menjadi acuan dalam penciptaan tatanan kota sebagai symbol penghubung sendi-sendi berbagai kekuatan kosmik alam semesta. Sumbu filosofis Yogyakarta mengikuti pola mata angin yang utara-selatan yang tegak lurus dengan sumbu orbit matahari (Karsono & Wahid, 2008). Analisa matematis melalui trigonometri segitiga bola akan memberikan interpretasi akurat berkaitan dengan data matematis azimuth (arah derajat dihitung dari utara).

Sumbu filosofis Yogyakarta berkaitan erat dengan tata ruang kota dengan mempertimbangkan nilai agama sebagai pusat (pathok). Hal ini dapat dibuktikan dengan adanya keterkaitan antara sumbu filosofis dengan tata letak empat masjid Pathok Negro di Yogyakarta yaitu: masjid Ploso Kuning, masjid Babadan, masjid Dongkelan (Meliana and Caroline. 2020). Dengan menerapkan analisa matematiks melalui trigonometri segitiga bola, akan dapat dirumuskan peta jarak, sudut, bahkan presisi tingkat kesimetrisan empat masjid Pathok Negro dan sumbu filosofis Yogyakarta.

Sumbu filosofis Yogyakarta bukan hanya tentang Panggung Krapyak, Kraton, dan Tugu Jogja. Lebih dari itu, sumbu ini menjadi pusat dari tata ruang kota elemen-elemen fisik lain dalam Kawasan Yogyakarta (Haryono, 2020). Elemen fisik yang dimaksud adalah papan penanda. Papan penanda adalah elemen-elemen fisik yang dapat ditemukan di ruang publik. Elemen-elemen ini dapat berupa bangunan, gerbang, simpul, papan reklame, rambu lalu lintas, papan informasi, media seni (mural), monumen (patung), dan instalasi seni tiga dimensi. Dengan analisa trigonometri segitiga bola, akan didapat interpretasi baru berkaitan dengan tata ruang yang menyeluruh dari kota Yogyakarta.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan secara matematis sumbu filosofis Yogyakarta, mulai dari presisi arah azimuth, jarak antar elemen, dan presisi azimuth bangunan-bangunan dalam sumbu filosofis Yogyakarta. Analisa matematis akan menggunakan trigonometri segitiga bola yang merupakan bagian dari geometri non-euclid pada bidang bumi.

## Metode

Berdasarkan jenis datanya, penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif. Penelitian kuantitatif merupakan penelitian yang terstruktur, sistematis, serta menggunakan angka dalam hasil pengumpulan data maupun analisa datanya (Syahroni, 2022). Adapun berdasarkan *framework* penelitiannya, penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dengan menggambarkan subjek atau objek penelitian secara objektif, sistematis dan terperinci (Zellatifanny & Mudjiyanto, 2018). Subjek dari penelitian ini adalah sumbu filosofis Yogyakarta. Adapun objek atau variabel yang diteliti dari sumbu filosofis adalah presisi azimuth, jarak antar elemen sumbu, serta azimuth bangunan pembentuk sumbu filosofis.

Pengumpulan data primer dilakukan dengan menggunakan instrumen theodolit dan GPS. Data primer dikumpulkan langsung di lapangan pada elemen-elemen sumbu filosofis Yogyakarta yaitu: Panggung Krapyak, Keraton Yogyakarta dan Tugu Jogja. Data yang dikumpulkan merupakan data angka tentang letak astronomis dan azimuth bangunan. Data diolah secara matematis menggunakan konsep trigonometri segitiga bola.

## Hasil dan Pembahasan

### Gambaran Letak Astronomis Sumbu Filosofis Yogyakarta

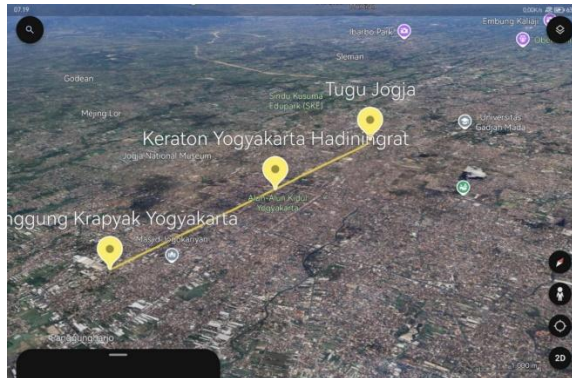
Berdasarkan pengumpulan data lapangan yang telah dilakukan, sumbu filosofis memiliki keunikan dan tingkat presisi yang sangat baik. Berdasarkan letak astronomis lintang dan bujur, sumbu filosofis Yogyakarta membentang lurus ke arah utara dengan presisi yang sangat tinggi. Pengukuran letak astronomis dilakukan dengan perangkat GPS yang langsung terhubung dengan satelit. Data tentang letak astronomis lintang dan bujur merupakan data utama yang akan dianalisa secara matematis dengan trigonometri segitiga bola. Didapatkan letak astronomis dari elemen-elemen utama sumbu filosofis Yogyakarta yaitu Panggung Krapyak, Keraton Yogyakarta dan Tugu Jogja berikut ini.

Tabel 1: Letak Astronomis Panggung Krapyak (PK), Keraton Yogyakarta (KY), Tugu Jogja (TJ)

| Letak Astronomis | Desimal        | Derajat, Menit, Detik            |
|------------------|----------------|----------------------------------|
| Lintang PK       | 7,8276398 LS   | 7 derajat 49 menit 39,5 detik    |
| Bujur PK         | 110,3605541 BT | 110 derajat 21 menit 37,99 detik |
| Lintang KY       | 7,8053047 LS   | 7 derajat 48 menit 19,097 detik  |
| Bujur KY         | 110,3642432 BT | 110 derajat 21 detik 51,28       |

|            |                | detik                            |
|------------|----------------|----------------------------------|
| Lintang TJ | 7,7829013 LS   | 7 derajat 46 menit 58,45 detik   |
| Bujur TJ   | 110,3670715 BT | 110 derajat 22 menit 1,457 detik |

Untuk selanjutnya, data-data astronomis lintang dan bujur yang telah didapatkan dengan GPS akan digunakan sebagai bahan analisa trigonometri segitiga bola. Secara visual, letak astronomis tiga elemen utama sumbu filosofis Yogyakarta terletak dapat divisualisasikan dalam peta sebagai berikut:



Gambar 1: Visualisasi Letak Astronomis Tiga Elemen Utama Sumbu Filosofis Yogyakarta

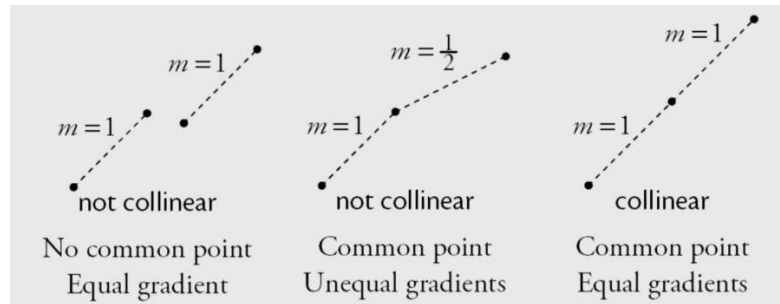
Sekilas, dari gambaran peta terlihat bahwa tiga elemen utama sumbu filosofis Yogyakarta terletak dalam 1 garis lurus. Bahkan, nampak bahwa jarak antar elemen adalah sama. Namun, pembuktian secara matematis akan memberikan perbandingan hasil yang lebih akurat tentang presisi tingkat kelurusan garis yang dibentuk dan presisi jarak antar elemen sumbu filosofis Yogyakarta.

**Analisa Trigonometri Segitiga Bola :Presisi Linearitas Sumbu Filosofis Yogyakarta**  
Berdasarkan jenis datanya, penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif. Penelitian kuantitatif

Bagian ini akan membahas tentang bagaimana tiga titik utama sumbu filosofis Yogyakarta membentuk suatu garis lurus di permukaan bumi. Artinya, analisa akan dilakukan guna mengetahui apakah tiga titik elemen utama sumbu filosofis Yogyakarta berada pada lingkaran besar yang sam atau tidak. Dalam bidang Euclid (bidang datar), tiga titik yang berada dalam satu garis lurus dikatakan sebagai titik-titik yang kolinear. Dalam geometri Euclid (bidang datar), teorema kolinearitas adalah sebagai berikut:

*“Teorema 1: (Titik-Titik dalam bidang datar dikatakan kolinear) Untuk setiap tiga titik yang kolinear, gradien garis dari dua titik akan sama dengan gradien garis dua titik yang lain (Diaz 2018)”*

Teorema di atas merupakan akibat dari teorema fundamental titik dalam geometri Euclid. Dalam geometri Euclid, dari setiap dua titik hanya dapat dibentuk satu garis lurus. Artinya, jika terdapat tiga titik A, B dan C, maka garis yang melewati AB hanya satu. Garis yang melewati BC juga hanya satu. Dengan kata lain, garis AB dan BC dikatakan sebagai satu garis lurus jika dan hanya jika B terletak pada AC. Dengan demikian Gradien AB harus sama dengan BC (atau AC). Ilustrasi dari teorema kolinearitas adalah sebagai berikut:



Gambar 2: Kolinearitas Tiga Titik dalam Bidang Euclid

Adapun dalam konteks geometri speris, Teorema 1 dirubah menjadi tiga titik berada dalam lingkaran yang sama (lurus dalam bidang bola). Konsep gradien dalam bidang datar merupakan kemiringan garis terhadap sumbu koordinat kartesius. Dalam geometri speris, gradien garis diimplementasikan dalam konsep azimuth garis terhadap utara sejati bola bumi. Teorema berikut menjelaskan hal tersebut:

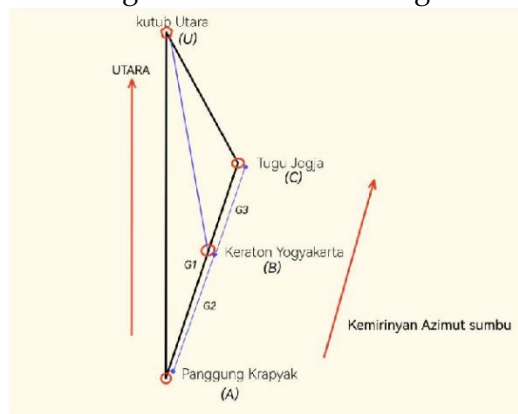
*“Terema 2: (Tiga titik dalam satu lingkaran besar) Tiga titik dalam bidang speris dikatakan dalam satu lingkaran besar (lurus) jika azimuth garis melalui dua titik sama dengan azimuth dari garis dua titik yang lain (Ayres, 1954).”*

Dari teorema di atas, tiga elemen utama yang merupakan titik lokasi yang dilalui sumbu filosofis Yogyakarta akan diukur tingkat presisinya. Dari Panggung Krapyak, Keraton Yogyakarta dan Tugu Jogja, dapat dibentuk tiga garis (lingkaran besar) sebagai berikut:

- 1) G1: garis (lingkaran besar) yang menghubungkan Panggung Krapyak dan Tugu Jogja
- 2) G2: garis (lingkaran besar) yang menghubungkan Panggung krapyak dan Keraton Yogyakarta
- 3) G3: garis (lingkaran besar) yang menghubungkan Keraton Yogyakarta dan Tugu PAL Jogja

Berdasarkan Teorema 2, Panggung krapyak, Keraton Yogyakarta, dan Tugu PAL Jogja dikatakan lurus (dalam satu lingkaran besar yang sama di bola bumi) apabila minimal dua garis dari G1, G2, dan G3, memiliki azimuth yang sama.

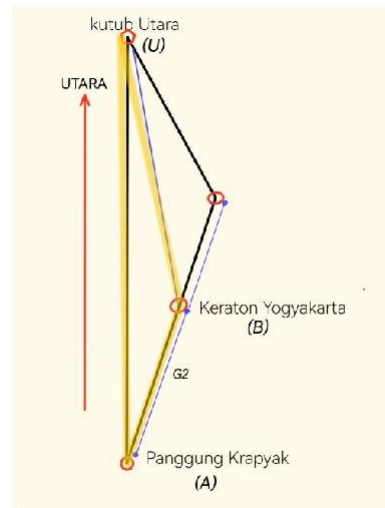
Dari pengukuran letak astronomis sebelumnya, didapat nilai letak bujur Panggung Krapyak, Keraton Yogyakarta, dan Tugu PAL Jogja, adalah 110,3605541, 110,3642432, dan 110,3670715. Dari nilai ini tergambar bahwa tiga titik ini tidak berada persis dalam satu garis bujur. Artinya, sumbu filosofis Yogyakarta tidak persis menghadap ke utara sejati jika dilihat dari letak astronomisnya. Visualisasi dalam dimensi dua (untuk mempermudah pemahaman) segitiga bola dari ketiga titik ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3: Visualisasi Segitiga Bola Panggung Krapyak, Keraton Yogyakarta, Tugu Jogja, dan Kutub Utara

Dari ilustrasi gambar di atas terdapat tiga segitiga bola yang dapat dianalisa yaitu: segitiga ABU, BCU, dan ACU. Dari ketiga segitiga ini dapat digunakan untuk mencari besar sudut A (azimut AB atau G2), sudut B (azimut BC atau G3), dan dan azimut AC (G1).

Pertama adalah segitiga bola ABU. Dari segitiga ABU, akan diukur besar sudut A yang tidak lain adalah azimut garis AB yang menghubungkan Panggung Krapyak dan Keraton Yogyakarta.



Gambar 4: Segitiga Bola Panggung Krapyak-Keraton Yogyakarta-Kutub Utara

Selanjutnya dilakukan analisa segitiga ABU (dalam garis kuning) dengan rumus trigonometri segitiga bola untuk mencari nilai A (Azimut garis G2 terhadap kutub utara).

$$\cot A = \frac{\cot BU \cdot \sin AU}{\sin U} \cdot \cos AU \cdot \cot U$$

Keterangan:

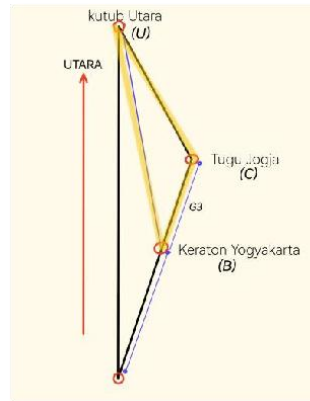
- ✓ A = sudut yang mewakili azimut G2
- ✓ AU = jarak lintang kutub utara ke Panggung Krapyak yang dicari dengan AU = 90 - Lintang Panggung Krapyak
- ✓ BU = jarak lintang kutub utara ke Keraton Yogyakarta yang dicari dengan BU = 90 - lintang Keraton Yogyakarta
- ✓ U = selisih letak bujur Panggung Krapyak dan Keraton Yogyakarta

$$\cot A = \frac{\cot 97,8053047 \cdot \sin 97,8276398}{\sin 0,0036891} \cdot \cos 97,8276398 \cdot \cot 0,0036891$$

Didapatkan

$$\begin{aligned}\cot A &= 6.1109612 \\ A &= 9,293533 \text{ derajat} \\ A &= 9^{\circ}17'36,71733''\end{aligned}$$

Kedua adalah segitiga bola BCU. Dari segitiga BCU, akan diukur besar sudut B yang tidak lain adalah azimut garis BC yang menghubungkan Keraton Yogyakarta dan Tugu Jogja.



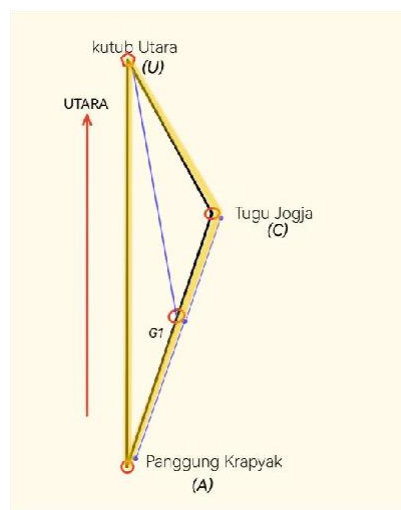
Gambar 5: Segitiga Bola Keraton Yogyakarta-Tugu Jogja-Kutub Utara

Dengan cara perhitungan yang sama, didapatkan nilai B sebagai berikut:

$$B = 7.129606 \text{ derajat}$$

$$B = 7^{\circ}7'46,58264''$$

Ketiga adalah segitiga bola ACU. Dari segitiga ACU, akan diukur besar sudut A yang tidak lain adalah azimuth garis AC yang menghubungkan Panggung Krapyak dan Tugu Jogja. Selain itu, garis AC dapat didefinisikan sebagai azimuth dari sumbu filosofis Yogyakarta karena garis AC membentang dari ujung-ujung sumbu filosofis.



Gambar 6: Segitiga Bola Panggung Krapyak-Tugu Jogja-Kutub Utara

Dengan perhitungan yang sama, didapatkan nilai A sebagai berikut:

$$A = 8.213117 \text{ derajat}$$

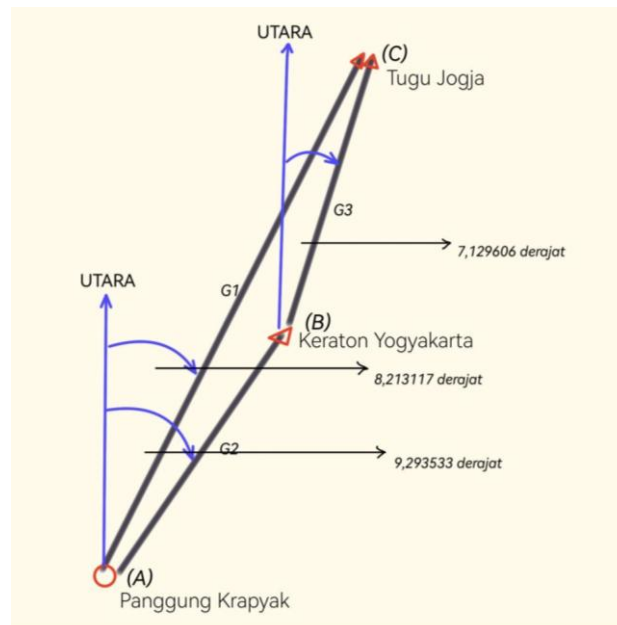
$$A = 8^{\circ}12'47,22097''$$

Dari perhitungan di atas, diperoleh azimuth G1, G2 dan G3 yang berbeda, yaitu:  $G1 = 8^{\circ}12'47,22097''$ ,  $G2 = 9^{\circ}17'36,71733''$ , dan  $G3 = 7^{\circ}7'46,58264''$ .

Dari Teorema 2, sumbu filosofis Yogyakarta dikatakan lurus dengan setiap elemennya berada dalam lingkaran besar bumi yang sama (lurus di permukaan bumi), hanya jika  $G1=G2$  atau  $G2=G3$  atau  $G1=G3$ . Dengan ketiga nilai Azimut garis yang berbeda, hal ini menunjukkan bahwa sumbu filosofis Yogyakarta tidak benar-benar lurus secara presisi matematis.

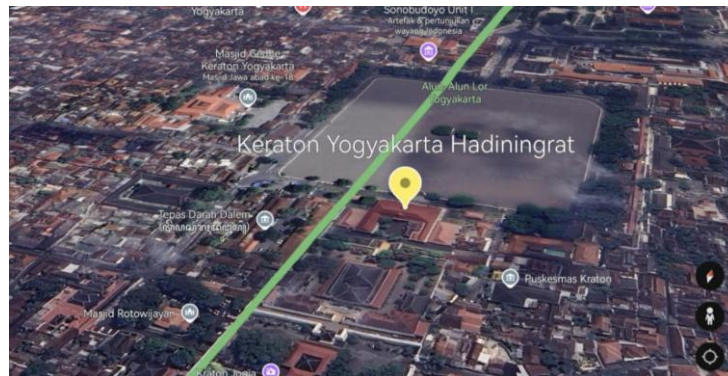
Walaupun demikian, perbedaan antar azimuth yang hanya berkisar 1 derajat mengindikasikan bahwa sumbu filosofis Yogyakarta ini adalah sumbu dengan ketelitian

yang sangat tinggi dilihat dari sisi arsitektur tata ruangnya. Sebuah sumbu yang membentang berkilo-kilo meter dari Panggung Krapyak sampai Tugu Jogja tetapi hanya bergeser di sekitar 1 derajat saja. Jika divisualisasikan dalam bidang datar, presisi kelurusan sumbu filosofis Yogyakarta adalah sebagai berikut:



Gambar 7: Presisi Kelurusan (linearitas) Elemen Sumbu Filosofis Yogyakarta

Dari gambar di atas terlihat bahwa jika ditarik dari garis lurus tepat dari tengah Panggung Krapyak menuju Tugu Jogja, maka Keraton Yogyakarta akan dilewati garis tersebut, namun tidak tepat di tengah keraton. Visualisasi dalam peta adalah sebagai berikut:



Gambar 8: Toleransi Kesalahan Presisi Linearitas Sumbu Filosofis Yogyakarta II

### **Analisa Trigonometri Segitiga Bola: Presisi Jarak Antar Elemen Sumbu filosofis Yogyakarta**

Bagian ini akan membahas tentang jarak antar elemen yang dilewati sumbu filosofis Yogyakarta. Selain tentang presisi tingkat kelurusan sumbunya, penelitian ini juga menguak analisa matematis menggunakan trigonometri segitiga bola tentang jarak Panggung Krapyak - Keraton Yogyakarta, Jarak Keraton Yogyakarta - Tugu Jogja, dan panjang sumbu dari Panggung Krapyak ke Tugu Jogja.

Pertama adalah jarak Panggung Krapyak dan Tugu Jogja yaitu panjang ruas garis G1. Untuk menghitung G1 maka digunakan segitiga bola ACU. Dengan menggunakan rumus

segitiga bola pada rumus sebelumnya,  $G1$  dihitung dengan formula sebagai berikut:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

Sehingga didapatkan formula sebagai berikut:

$$\cos G1 = \cos AU \cdot \cos CU + \sin AU \cdot \sin CU \cdot \cos U$$

Keterangan:

- ✓ AU = jarak lintang kutub utara ke Panggung Krapyak yang dicari dengan AU =  $90 - \text{Lintang Panggung Krapyak}$
- ✓ CU = jarak lintang kutub utara ke Tugu Jogja yang dicari dengan CU =  $90 - \text{lintang Tugu Jogja}$
- ✓ U = selisih letak bujur Panggung Krapyak dan Tugu Jogja

Selanjutnya, dihitung nilai  $G1$  sebagai berikut:

$$\cos G1 = \cos 97,8276398 \cdot \cos 97,7829013 + \sin 97,8276398 \cdot \sin 97,7829013 \cdot \cos 0,0065174$$

Didapatkan nilai  $\cos G1 = 0,999999688798829$ . Dengan rumus invers cosinus, didapatkan panjang  $G1$  dalam derajat sebagai berikut

$$G1 = 0.0452020626642481 \text{ derajat}$$

Dengan cara yang sama, didapatkan panjang  $G2$  dan  $G3$  sebagai berikut:

$$G2 = 0.0226321547497537 \text{ derajat}$$

$$G3 = 0.0225779649132593 \text{ derajat}$$

Jarak di atas, dapat dirubah dalam satuan panjang dengan cara membandingkan dengan keliling bumi dalam satuan panjang. Keliling bumi dapat dihitung dengan formula:

$$\text{Keliling Bumi} = 2 \cdot \pi \cdot r \text{ (jari-jari bumi)}$$

Perlu dipahami terlebih dahulu bahwa bumi memiliki bentuk bola yang pepat pada kedua kutubnya. Artinya, jari-jari yang melintasi equator akan berbeda dengan jari-jari yang diukur dari kedua kutub bumi. Jari-jari ekuator: 6378.137 km (lebih panjang karena Bumi "melebar" di ekuator). Jari-jari kutub: 6356.752 km (lebih pendek karena Bumi "memipih" di kutub). Jari-jari rata-rata (rata-rata geometrik): 6371.0 km

Karena jarak yang diukur adalah sumbu filosofis Yogyakarta yang membentang dari selatan ke utara, maka lingkaran besar yang dilalui mengelilingi bumi di sekitar kutubnya. Maka dari itu, digunakan jari-jari kutub dalam perhitungan jarak sumbu filosofis. Keliling bumi dihitung sebagai berikut:

$$\text{Keliling Bumi} = 2 \cdot \pi \cdot 6356752 \text{ (meter)}$$

Didapatkan jarak dalam satuan panjang meter untuk ketiga ruas garis  $G1$ ,  $G2$ , dan  $G3$  sebagai berikut:

$$G1 \text{ (dalam meter)} = \frac{G1 \text{ (dalam derajat)}}{360^\circ} \cdot \text{Keliling Bumi}$$

Dengan substitusi didapatkan:

$$G1 \text{ (dalam meter)} = \frac{0.0452020626642481^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6356752 \text{ (meter)}$$

Didapatkan nilai  $G1$  sebagai berikut:

$$G1 = 5014.99944126734 \text{ meter}$$

Dengan cara yang sama, nilai  $G2$  dan  $G3$  dapat dihitung dengan menggunakan perbandingan keliling bumi. Sehingga, diperoleh nilai  $G2$  dan  $G3$  dalam satuan panjang sebagai berikut:

$$G2 = 2510.95274717324 \text{ meter}$$

$$G3 = 2504.9405879105 \text{ meter}$$

Dari perhitungan di atas, didapatkan fakta menarik berkaitan dengan analisa presisi jarak antar elemen sumbu filosofis Yogyakarta, diantaranya:

$$G1 = 5014.99944126734 \text{ meter}$$

Panjang  $G1$  (Jarak Panggung Krapyak-Tugu Jogja) memiliki ketepatan dalam ukuran panjang nyaris tepat 5000 meter atau 5 kilometer.

$$G1 \cong 5 \text{ kilometer}$$

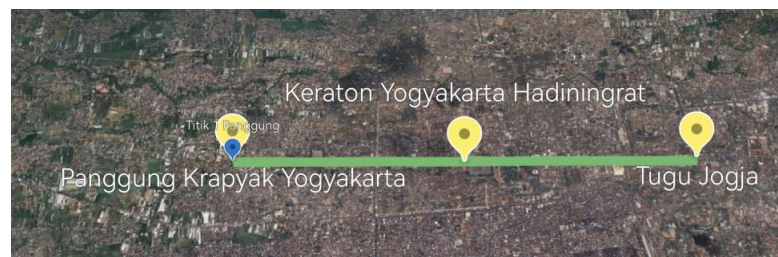
Hal ini menguatkan presisi jarak dalam sumbu filosofis yang dirancang dengan teknologi yang sangat baik di abad ke delapan belas.

Panjang G2 dan G3 nyaris sama panjang. Dalam sumbu filosofis, Keraton Yogyakarta berada di tengah sumbu filosofis di antara Panggung Krapyak dan Tugu Jogja. Menjadi hal yang luar biasa, G2 (Panggung Krapyak-Keraton Yogyakarta) dan G3 (Keraton Yogyakarta-Tugu Jogja) memiliki panjang yang nyaris sama, yaitu:

$$G2 = 2510.95 \text{ dan } G3 = 2504.94 \text{ meter}$$

$$G2 \cong G3 \cong 2,5 \text{ kilometer}$$

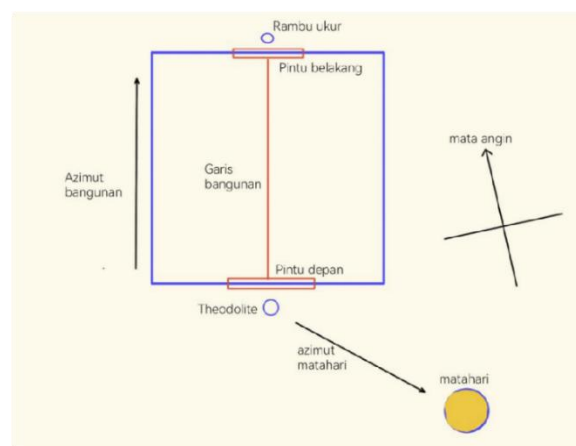
Dengan mempertimbangkan ukuran bangunan Kraton, maka sangat bisa diasumsikan bahwa Keraton Yogyakarta membagi sumbu filosofis Yogyakarta tepat di tengah-tengah. Tugu Jogja dan Panggung Krapyak memiliki jarak yang sama ke Keraton Yogyakarta yaitu sekitar 2500 meter atau 2,5 kilometer.



Gambar 9: Visualisasi Peta Presisi Jarak Antar Elemen Sumbu Filosofis Yogyakarta

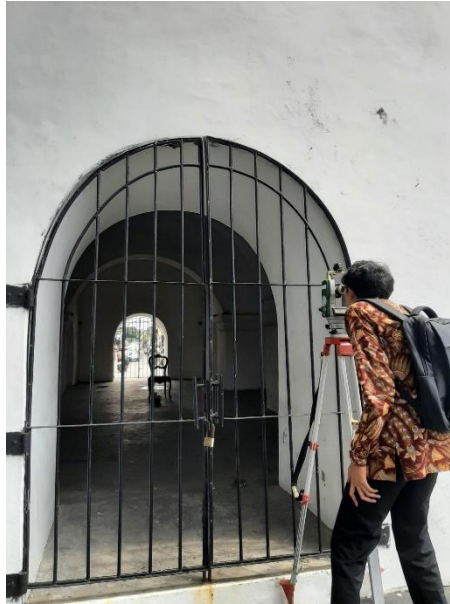
### ***Analisa Trigonometri Segitiga Bola: Presisi Azimut Bangunan Dalam Sumbu filosofis Yogyakarta***

Salah satu yang menarik untuk dikaji dari sumbu filosofis Yogyakarta adalah azimut bangunan dari elemen yang dilewati sumbu filosofis. Menurut hipotesa peneliti, bangunan-bangunan yang dilewati sumbu filosofis memiliki arah azimut yang sama dengan sumbu filosofis.



Gambar 10: Prosedur Pengukuran Azimut Bangunan Sumbu Filosofis Yogyakarta

Pengukuran azimut bangunan dalam penelitian ini hanya dilakukan pada Panggung Krapyak dan Keraton Yogyakarta. Berikut ini diberikan hasil pengukuran azimut bangunan Panggung Krapyak dan Keraton Yogyakarta.



*Gambar 11: Pengukuran Azimut Bangunan Panggung Krpyak dengan Teodolite*

Dari semua tahapan yang dilakukan, didapatkan azimut matahari sebesar  $154^{\circ} 37' 13''$ . Dari theodolite, didapatkan selisih antara azimut bangunan dan azimut matahari sebesar  $214^{\circ} 33' 40''$ . Dengan demikian, didapatkan azimut bangunan Panggung Krpyak adalah  $154^{\circ} 37' 13'' + 214^{\circ} 33' 40'' = 369^{\circ} 10' 53''$  yang ekuivalen dengan  $9^{\circ} 10' 53''$

Kedua adalah pengukuran azimut bangunan Keraton Yogyakarta. Karena bangunan keraton sangat luas, maka pengukuran azimut bangunan kerato menjadi lebih fleksibel. Bangunan keraton memiliki banyak gerbang yang tepat berada di tengah bangunan. Dengan Menggunakan garis lantai dan mengarahkan theodlite tepat ke arah tengah pintu gerbang, maka arah tersebut mewakili azimut bangunan keraton.

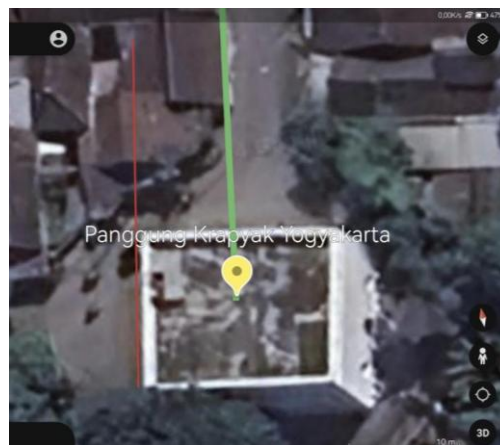


*Gambar 12: Penentuan Azimut Bangunan Keraton Yogyakarta Hadiningrat*

Dengan tahapan yang sama dengan proses pengukuran sebelumnya, didapatkan azimut matahari sebesar  $139^{\circ} 21' 08''$  dan sudut yang tertulis di theodolite sebesar  $228^{\circ} 50'$

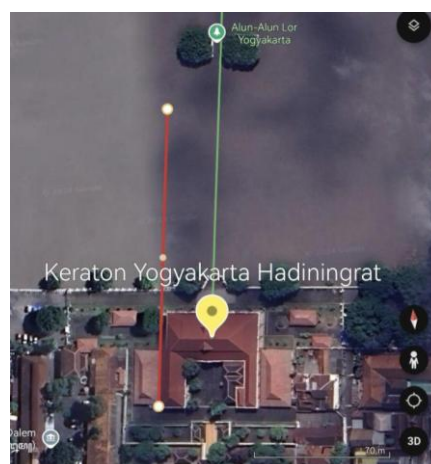
09''. Dengan demikian, didapatkan azimuth bangunan keraton sebesar  $139^{\circ} 21' 08'' + 228^{\circ} 50' 09'' = 368^{\circ} 11' 17''$  yang setara dengan  $8^{\circ} 11' 17''$ .

Dalam analisa sebelumnya, didapatkan fakta bahwa azimuth sumbu filosofis yang membentang dari Panggung Krapyak ke Tugu Jogja adalah berkisar  $7^{\circ}$  hingga  $9^{\circ}$ . Adapun dari hasil pengukuran, azimuth bangunan Panggung Krapyak sebesar  $9^{\circ} 10' 53''$ . Sedangkan, azimuth Keraton Yogyakarta sebesar  $8^{\circ} 11' 17''$ . Dari data ini, terlihat bahwa presisi dari sumbu filosofis Yogyakarta bukan hanya terletak pada presisi kelurusan antar titik. Namun, azimuth bangunan yang dibangun di dalam sumbu filosofis juga memiliki presisi yang mendekati azimuth sumbu filosofis Yogyakarta. Tingkat toleransi kesalahan hanya berkisar  $\pm 1^{\circ}$ . Presisi azimuth bangunan ini terlihat secara visual dalam gambar berikut ini:



Gambar 13: Visualisasi Presisi Tingkat Kesejajaran Arah Bangunan Panggung Krapyak dengan Sumbu Filosofis

Dari gambar di atas, terlihat bangunan azimuth Panggung Krapyak yang diwakili garis merah memiliki presisi kesejajaran dengan sumbu filosofis Yogyakarta yang diwakili garis hijau.



Gambar 14: Visualisasi Presisi Tingkat Kesejajaran Arah Bangunan Keraton Yogyakarta dengan Sumbu Filosofis Yogyakarta

Seirama dengan Panggung Krapyak, azimuth bangunan Keraton Yogyakarta yang diwakili garis merah juga memiliki presisi kesejajaran dengan sumbu filosofis Yogyakarta dalam garis hijau

## Kesimpulan

Trigonometri segitiga bola dapat dijadikan alat analisa presisi sumbu imajiner Yogyakarta. Berdasar hasil analisa, sumbu imajiner yang memuat di dalamnya sumbu filosofis Yogyakarta memuat nilai-nilai matematis dengan presisi tinggi. Berdasarkan sudut azimuth, lokasi titik utama sumbu filosofis yaitu Panggung Krapyak, Keraton Yogyakarta, dan Tugu Jogja berda dalam satu garis lurus dengan tingkat toleransi kesalahan kurang dan lebih 1 derajat saja. Dari sisi arah bangunan, arah bangunan Panggung Krapyak dan Keraton Yogyakarta mengarah sejajar dengan sumbu filosofis Yogyakarta. Lebih lanjut, jarak dari Panggung Krapyak-Keraton Yogyakarta dan Keraton Yogyakarta-Tugu Jogja memiliki panjang yang nyaris sama pada angka 2,5 kilometer. Adapun total panjang sumbu filosofis nyaris tepat 5 kilometer.

## References

- Ayres, F. (1954). *Theory and problems of plane and spherical trigonometry*.
- D\'iaz, J. E. M. (2018). Fifth postulate of Euclid and the non-Euclidean geometries. Implications with the spacetime. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 9(3), 530-542.
- Detik.com. (2023). *Ditetapkan Sebagai Warisan Dunia UNESCO Apa Itu Sumbu Imajiner Yogyakarta*. <https://www.detik.com/edu/detikpedia/d-6946956/ditetapkan-sebagai-warisan-dunia-unesco-apa-itu-sumbu-filosofi-yogyakarta>
- Haryono, A. Y. (2020). PENANDA KAWASAN SEBAGAI PENGUAT NILAI FILOSOFIS SUMBU UTAMA KOTA YOGYAKARTA. *ATRIUM: Jurnal Arsitektur*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:235088310>
- Hatley, B. (2008). *Javanese performances on an Indonesian stage: celebrating culture, embracing change*. NUS Press.
- Karsono, B., & Wahid, J. Bin. (2008). IMAGINARY AXIS AS A BASIC MORPHOLOGY IN THE CITY OF YOGYAKARTA-INDONESIA. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:214738112>
- Mardika, A. (2023). The Imaginary Axis of Yogyakarta: A Cultural and Historical Landscape. *International Journal of Heritage Studies*, 29(1), 1-12.
- Pardimin, P. (2018). *Etnomatematika Dalam Budaya Masyarakat Yogyakarta*.
- Putra, I. W. S. (2003). Yogyakarta's Cultural Landscape: Harmony, Hierarchy, and the Performance of Place. *Indonesia and the Malay World*, 31(82), 1-20.
- Rivai, A. (2018). Penerapan Konsep Trigonometri Segitiga Bola Terhadap Penentuan Hisab Awal Bulan Qamariyah Yang Berdasarkan Sistem Almanak Nautika. *Jurnal Sains Dan Teknologi Al-Qur'an*, 3(1), 1-10.
- Soedarto. (2007). *Geometri Bola*. Erlangga.
- Sunaryati, E. (2015). Urban Planning of Yogyakarta: A Reflection of Religious and Philosophical Values. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 195, 107-116.
- Syahroni, M. I. (2022). PROSEDUR PENELITIAN KUANTITATIF. *EJurnal Al Musthafa*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:268234389>
- Zellatifanny, C. M., & Mudjiyanto, B. (2018). TIPE PENELITIAN DESKRIPSI DALAM ILMU KOMUNIKASI. *Diakom: Jurnal Media Dan Komunikasi*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:186454083>